

$$1. \quad y^2 + z^2 - 4z = 0$$

Si $G(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4z$ entonces la sup. es $G = 0$ (es T).

$$\iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \iint_T \vec{F} \cdot d\vec{T} + \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz - \iint_T \vec{F} \cdot d\vec{T}$$

Pide con la normal hacia adentro... entonces lo pedido es el opuesto de Gauss...

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_T \vec{F} \cdot d\vec{T} - \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iint_T \vec{F} \cdot d\vec{T} - 3$$

$$\iint_T \vec{F} \cdot d\vec{T} = \iint_T \vec{F} \cdot \frac{\nabla G}{|G'_z|} \, dx \, dy$$

$$\frac{\nabla G}{|G'_z|} = \frac{(0, 2y, 2z-4)}{|2z-4|} = \frac{2(0, y, z-2)}{2|z-2|} = \frac{(0, y, z-2)}{|z-2|} = \frac{(0, y, z-2)}{z-2} \quad \text{pues la}$$

componente z del vector normal es positiva, entonces, $z-2 > 0$.

$$\Rightarrow F \cdot \frac{\nabla G}{|G'_z|} = (P-3x, -x(z-2)Q, xyQ) \cdot \left(0, \frac{y}{z-2}, 1\right) = -xyQ + xyQ = 0$$

$$\therefore \iint_T \vec{F} \cdot d\vec{T} = \iint_T \vec{F} \cdot \frac{\nabla G}{|G'_z|} \, dx \, dy = 0$$

$$\therefore \boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -3}$$

$$2. \quad \iint_S \overrightarrow{Rot}(\vec{F}) \, d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{C} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} + \int_T \vec{F} \cdot d\vec{T}$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \iint_S \overrightarrow{Rot}(\vec{F}) \, d\vec{S} - \int_T \vec{F} \cdot d\vec{T}$$

Parametrizando T : $T(t) = t(0, 0, -1-1) + (0, 0, 1) = (0, 0, -2t+1)$

[al revés, de -1 a 1], entonces, $T(t) = (0, 0, 2t-1)$.

$$\int_T \vec{F} \cdot d\vec{T} = \int_0^1 (\dots, \dots, 0.0+1) \cdot (0, 0, 2) \, dt = \int_0^1 2 \, dt = 2$$

$\vec{n} = (1, -1, 0)$ constante porque es en el plano.

$$\Rightarrow \iint_S \overrightarrow{Rot}(\vec{F}) \, d\vec{S} = \iint_S (1, 1, 0) \cdot (1, -1, 0) = 0$$

$$\therefore \boxed{\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = -2}$$

$$3. \quad \text{Sobre } xy, \text{ es } z = 0, \Rightarrow x^2 + 4y^2 \leq 1.$$

Tiene un eje de simetría en $x = 0$, $\Rightarrow 4y^2 - z^2 \leq 1 \Rightarrow z^2 \geq 4y^2 - 1 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{4y^2 - 1}$.

Como z está entre 0 y 1 , $1 \geq z \geq \sqrt{4y^2 - 1} \geq 0$. Ésta es P , la proyección de D sobre yz .

La región es simple si se integra en el otro orden: $|y| = \sqrt{\frac{z^2}{4} + \frac{1}{4}}$, con $0 \leq y \leq 1$.

$$A = \iint_P dP = \int_0^1 \int_{-\sqrt{\frac{z^2+1}{4}}}^{\sqrt{\frac{z^2+1}{4}}} dy dz = \int_0^1 2\sqrt{\frac{z^2+1}{4}} dz = \int_0^{1/2} 2\sqrt{u^2 + (1/2)^2} \frac{du}{1/2}$$

$$= 4 \left[\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + (1/2)^2} + \frac{(1/2)^2}{2} \ln \left(u + \sqrt{u^2 + (1/2)^2} \right) \right]_0^{1/2} = \boxed{\frac{\ln(\sqrt{2}+1)}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 1,1478}$$

4.

a) $\nabla f(x, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}, 0, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (0, 0, 0)$

Como $G = y^2 - 4x^2 = 0$ entonces, $\frac{dy}{dx} = -\frac{G_x}{G_y} = -\frac{-8x}{2y} = \frac{4x}{y} = \frac{4x}{2x} = 2$ (forma difícil), o directamente, $y = 2x$ entonces, $dy/dx = 2$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -2\frac{\partial f}{\partial y}$. Como debe ser $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ ó $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, entonces, tomamos, por ej., $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$.

$$\therefore \nabla f(1, 2, 4) = (-2, 1, 0)$$

Así, el gradiente de f es perpendicular a la superficie, por ser una superficie de nivel de f . Entonces, el plano puede ser, $\boxed{-2x + 1 = 0}$

b) Es un campo conservativo pues cumple $d/dx[y] = d/dy[x^2] = 0$.

Función potencial: $F(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + K$.

Entonces, la circulación desde (0,0) hasta (-2,-1) es $F(-2,-1) - F(0,0) = \boxed{-2/3}$.

5.